

# EMULACIÓN DE SISTEMAS LINEALES USANDO MICROCONTROLADORES DE GAMA MEDIA

**Juan Sebastián Botero Valencia y Edilson Delgado Trejos**  
Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín (Colombia)

## Resumen

El análisis de sistemas lineales implica la obtención de un modelo que se utiliza para adquirir información del sistema real. El modelado ofrece una ventaja importante cuando la implementación física de un sistema es costosa, o cuando la operación puede resultar en daños a los componentes del equipo. Los métodos de simulación por computador ofrecen una solución parcial al problema y dificultan el uso de elementos reales (sensores y actuadores) cuando se implemente una estrategia de control sobre un sistema físico. En el presente trabajo se muestra una técnica para emular el comportamiento de un sistema lineal usando el espacio de estados discretizado con el objetivo de implementarlo en sistemas de bajo procesamiento. Finalmente, se obtiene un algoritmo que representa un sistema lineal recursivamente y que puede ser implementado en sistemas microcontrolados.

**Palabras clave:** Sistema lineal, emulación, microcontrolador, espacio de estados

## Abstract

The linear systems analysis involves obtaining a model that is used to acquire information from the real system. The model offers an important advantage when the physical implementation of a system is expensive, or when the operation may result in damage to computer components. The computer simulation methods offer a partial solution but hinder the use of real elements (sensors and actuators) when we implement a strategy of control of a physical system. This paper demonstrates a technique to emulate the behavior of a linear system using state space discretized in order to implement low-processing systems. Finally we obtain an algorithm that represents a linear system recursively and can be implemented in microcontroller systems.

**Keywords:** Linear System, emulation, microcontroller, state space

## Introducción

En la ingeniería de control, el análisis de sistemas lineales, ocupa gran parte de la teoría y la práctica. Es conocido el hecho de que no existen los sistemas lineales, aunque muchos sistemas de la realidad pueden aproximarse eliminando pequeñas no linealidades que son despreciables. Para el análisis se convirtió en una tarea primordial el desarrollo de técnicas de simulación y emulación que permitieran representar un sistema a partir de una ecuación diferencial o un conjunto de ellas usando dispositivos de electrónica analógica (Avendaño, 2007). En el control clásico, un sistema lineal, puede ser representado considerando sus condiciones iniciales iguales a cero a través de la función de transferencia, para que ésta pueda ser usada en el análisis y manipulación del modelo real (Chen, 1993).

El desarrollo de la tecnología digital supuso un salto tecnológico y fue necesario el desarrollo de una representación y manipulación de sistemas en formatos digitales. Las técnicas de simulación por computador introdujeron una gran ventaja al análisis de sistemas lineales, el almacenamiento, la observación y la adquisición, mejorando el rendimiento y el desarrollo en investigación de los sistemas de control (Ogata, 1995).

Recientemente se han realizado trabajos para implementar algoritmos sobre plataformas de bajo procesamiento, como en Hernández L. *et al*, (2006) y en Botero V. *et al*, (2009) donde se buscan estrategias para simplificar métodos de cálculo con el objetivo de usarlos en plataformas portables. En esta línea se busca encontrar formas de obtener el mismo resultado o el más próximo posible al obtenido en un método robusto, la ventaja de simplificar es reducir costos y realizar aplicaciones sobre sistemas embebidos.

Algunos métodos clásicos de emulación usando amplificadores operacionales ofrecen buenas aproximaciones al Espacio de Estados (Avendaño, 2007), pero su uso se limita dada la baja flexibilidad y la dificultad para conseguir elementos electrónicos pasivos con los valores requeridos. En este documento se presenta la implementación de un algoritmo para emular sistemas lineales en un microcontrolador de

gamma media. El objetivo de la emulación es usar en el desarrollo de análisis y diseño de controladores.

El sistema implementado recibe una señal analógica de entrada que debe ser escalada al tipo de variable usada por el microcontrolador y, posteriormente, procesada para representar a la salida el valor escalado de la respuesta temporal del sistema.

## Materiales y métodos

### Representación discreta

Un sistema físico (mecánico, eléctrico, etc.) puede ser representado, a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales. Para los sistemas lineales, se puede obtener una forma de representación matemática relacionando las entradas y salidas del sistema. La forma de representación en espacio de estados es ideal, ya que permite representar múltiples entradas-múltiples salidas y, variando sus formas canónicas, se puede obtener información interna del sistema, controlar su comportamiento o analizar su estabilidad de forma directa.

Para representar sistemas continuos sobre plataformas de procesamiento digitales, es necesario convertir la representación continua a través de alguna técnica de muestreo. El objetivo principal es que la respuesta del sistema discreto sea aproximada a la respuesta del sistema continuo. En este caso se usará una técnica de discretización llamada retenedor de orden cero (ZOH) por sus siglas en inglés.

Considere la ecuación de estado en tiempo continuo mostrada en (1).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Aplicando una discretización, (1) se puede expresar como se muestra en (2).

$$x((k+1)T) = G(T)x(kt) + H(T)u(kt)$$

$$y(kt) = Cx(kt) + Du(kt) \quad (2)$$

$$u(t) = u(kT) \quad \text{para } kT \leq t \leq kT + T$$

Usando (2) se definen (3) y (4). El procedimiento se muestra en (Ogata, 1995).

$$G(T) = e^{AT} \quad (3)$$

$$H(T) = \left[ \int_0^T e^{Ah} dh \right] B \quad (4)$$

### Solución recursiva

Teniendo en cuenta (3), se puede proponer una solución sustituyendo de manera recursiva como se muestra en (5).

$$k = 0$$

$$x(T) = G(T)x(0) + H(T)u(0) \quad (5)$$

$$k = 1$$

$$x(2T) = G(T)x(T) + H(T)u(T)$$

Desarrollando el proceso se puede generalizar en (6).

$$k = N - 1$$

$$x(NT) =$$

$$G(NT)x(0) + \sum_{i=0}^{N-1} G((N-i-1)T)H(T)u(T) \quad (6)$$

$$y(NT) = Cx(NT)$$

### Algoritmo propuesto

Las instrucciones básicas del Microcontrolador no permiten realizar operaciones en punto flotante, sin embargo las librerías incluidas en el MPLAB C contienen estas funciones. La variable  $u$  es obtenida del puerto análogo de entrada  $AN0$  y la salida  $y$  se lleva al puerto digital  $B$  donde finalmente con un DAC (se muestra en la Figura 1) se construye la señal de salida del sistema. El retardo se determina por la frecuencia de muestreo del retenedor.

Se inicializa  $G$ ,  $H$  y  $C$  teniendo en cuenta los valores obtenidos en (3) y (4).

### Ciclo infinito

1. Cálculo del vector de estado:

Para  $i=1, \dots, n$

a. Se calcula el vector  $Ax(k)$ :

Para  $j=1, \dots, n$

$$X(i, 1) = A(i, j) * X(j, 2) + X(i, 1)$$

b. Se adquiere  $u$  de la entrada análoga:

$$u = \text{leer}(AN0)$$

c. Se obtiene el vector de estado  $x(k+1)$ :

$$X(i, 1) = X(i, 1) + B(i, 1) * u$$

2. Cálculo de la salida  $y$ :

Para  $i=1, \dots, n$

$$y = C(1, i) * X(i, 2) + y$$

a. Se escribe  $y$  en el puerto digital B:

Escribir (B,  $y$ )

3. Actualización de variables :

a. Se actualiza  $x(k)$ :

Para  $i=1, \dots, n$

$$X(i, 2) = X(i, 1)$$

b. Se reinicia  $y$ :

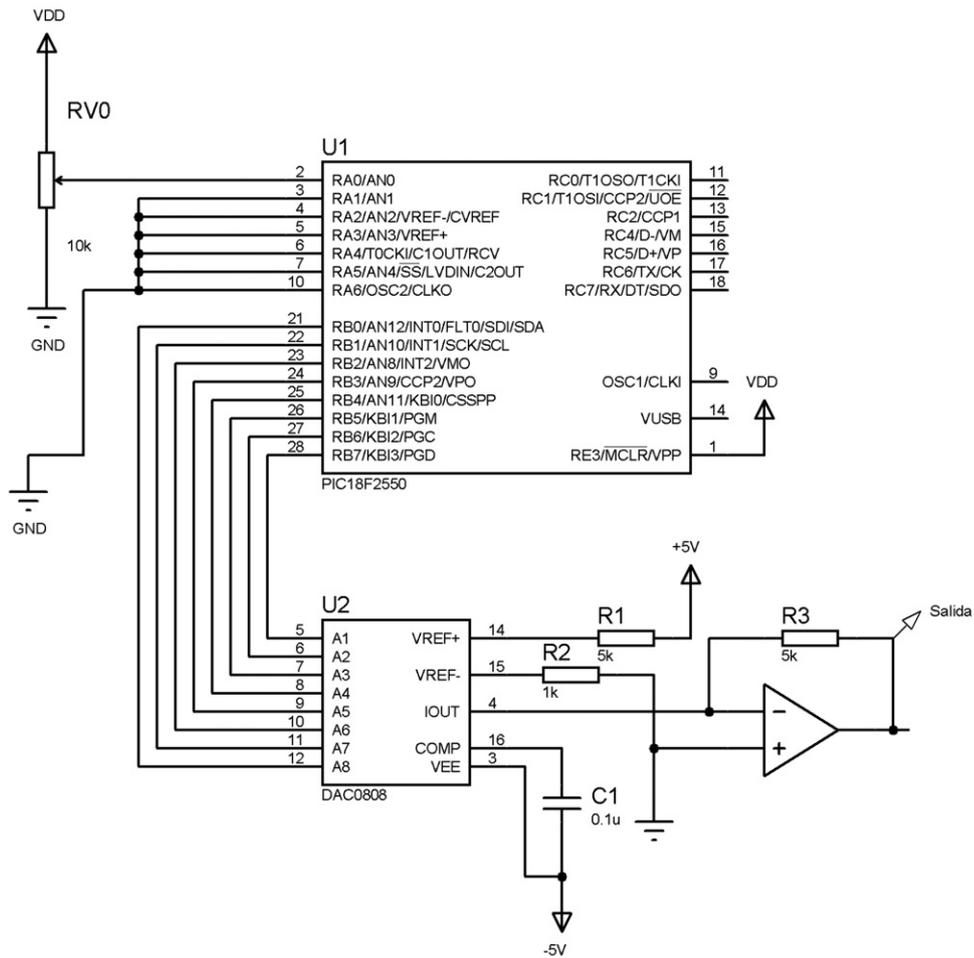
$$y = 0$$

Se espera para corresponder a la  $f_s$  del retenedor: retardo( $1/f_s$ )

### Microcontroladores PIC

Los PICmicro (Peripheral Interface Controller) son una familia de micro controladores de 8 bits desarrollados sobre arquitectura RISC (Reduction Instruction Set Computer) por Microchip Technology Inc. Microchip proporciona un entorno de desarrollo freeware llamado MPLAB que incluye compiladores de C en versiones estudiantiles para sus múltiples familias. Se escogió en particular esta familia por la inclusión de periféricos como el puerto USB y el modulo PWM que pueden ser usados en futuros desarrollos del proyecto y por el bajo costo de estos en el mercado. En la figura 1 se observa el montaje básico de la aplicación con un micro controlador PIC18F2550 y un DAC0808.

Figura 1. Montaje básico de la aplicación



**Resultados**

En la figura 2 se observa la respuesta al escalón unitario descrita por la función de transferencia en (7). Las curvas llamadas micro controlador, corresponden a las señales obtenidas a la salida del conversor digital análogo. Las curvas de simulación se obtuvieron usando Matlab®.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad (7)$$

$$H(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 13} \quad (8)$$

En la figura 3 se observa la respuesta al escalón unitario descrita por la función de transferencia en (8) con una  $f_s = 5 \text{ Hz}$ . En la figura 3 se observa que

el error de aproximación es alto por la escogencia de la frecuencia de muestreo.

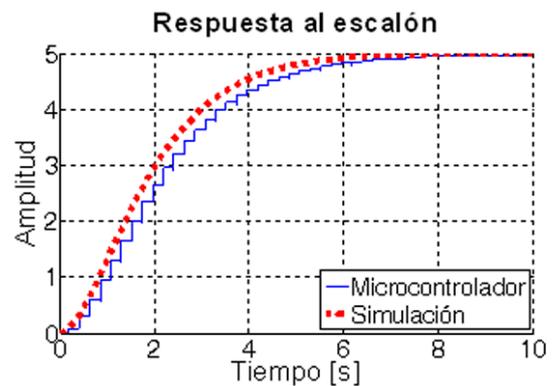


Figura 2.  $f_s = 20 \text{ Hz}$

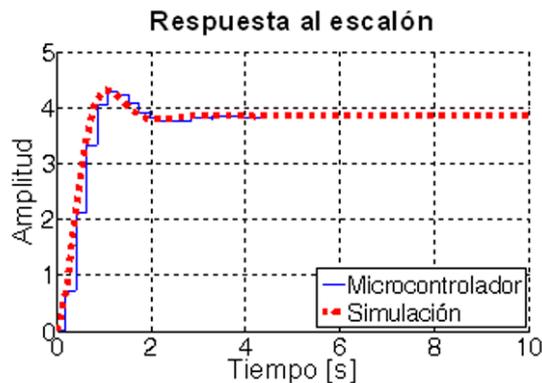


Figura 3.  $f_s = 20 \text{ Hz}$

En la figura 4 se muestra la respuesta de la función de transferencia (8) con una  $f_s = 20 \text{ Hz}$ , se observa comparando con la figura 3 que la aproximación de la respuesta es mejor. La figura 5 muestra la respuesta al sistema oscilatorio descrito en (9) con una  $f_s = 5 \text{ Hz}$   $f_s = 5 \text{ Hz}$ .

$$H(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 13} \quad (9)$$

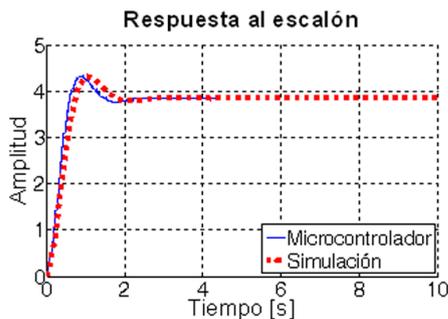


Figura 4.  $f_s = 20 \text{ Hz}$

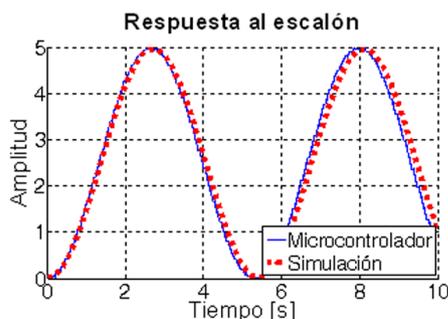


Figura 5.  $f_s = 20 \text{ Hz}$

La tabla 1 muestra el error calculado a partir de la comparación entre la salida del sistema obtenida en Matlab® y la obtenida en el micro controlador a las

funciones descritas en (7), (8) y (9) con diferentes frecuencias de muestreo.

Tabla 1. Error de aproximación

	(7)	(8)	(9)
$f_s = 5 \text{ Hz}$	0.1251	0.1812	0.1006
$f_s = 20 \text{ Hz}$	0.0843	0.1101	0.0412
$f_s = 50 \text{ Hz}$	0.0250	0.0234	0.0110

## Conclusiones

Se obtuvo un algoritmo para representar un sistema lineal y que pudiera ser implementado en un sistema micro controlado de gamma media. El algoritmo desarrollado es de gran utilidad en laboratorios de control para ingeniería ya que la flexibilidad de los sistemas que se pueden implementar permite modificar con facilidad las aplicaciones y usar sensores y actuadores reales.

Como trabajo futuro y conociendo otros periféricos como los módulos comparadores, se puede pensar en la implementación de sistemas no lineales bajo la misma filosofía.

## Agradecimientos

Este trabajo está enmarcado en labores de investigación del Grupo MIRP, del Centro de Investigación del Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia.

## Referencias

- Avendaño, L. E. (2007). *Sistemas Electrónicos Analógicos Un Enfoque Matricial* (Primera Edición ed.). Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, Colombia.
- Botero Valencia, J. S., Sánchez Giraldo, L. G., & Delgado Trejos, E. (2009). Clasificador no lineal basado en redes neuronales con funciones de base radial para implementación en sistemas de punto fijo. *Tecnológicas* (22), pp 11-28.

- Chen, C.-T. (1993). Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods. Oxford University Press. New York, United States.
- García Breijo, E. (2008). Compilador C CCS y simulador PROTEUS para microcontroladores PIC (Primera edición ed.). Alfaomega. México, México
- Hernandez L., J., & Salazar G., S. (2006). Implementación de una Máquina de Vectores de Soporte empleando FPGA. Scientia et Technica Año XII, No 31 , pp.47-52.
- Hush, D. R., & Horne, B. (1998). Efficient algorithms for function approximation with piecewise linear sigmoidal networks. IEEE Transaction on Neural Networks , pp.1129–1141.
- Ibrahim, D. (2008). Advanced PIC Microcontroller projects in C. United States of America: Newnes.
- Kuo, B. C. (1996). Automático, Sistemas de Control (Septima edición ed.). Prentice Hall. México, México.

## Sobre los autores

---

### Juan Sebastián Botero Valencia

Ingeniero Electrónico – Universidad Nacional de Colombia. Estudiante de Maestría en Automatización y Control Industrial. Investigador. Instituto Tecnológico Metropolitano.  
juanbotero@itm.edu.co

### Edilson Delgado Trejos

Ingeniero Electrónico. M. Sc. en Automatización Industrial. Ph. D. en Ingeniería LI Automática. Académico Director del Centro de Investigación, Instituto Tecnológico Metropolitano.  
edilsondelgado@itm.edu.co

Los puntos de vista expresados en este artículo no reflejan necesariamente la opinión de la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería.