

# Solución de problemas complejos de ingeniería empleando sistemas cognitivos especializados como motivación en la enseñanza de matemáticas avanzadas para ingeniería

Luis Alberto Toro-Carvajal <sup>a,e</sup>, Hugo Hernán Ortiz- Álvarez <sup>b,f</sup> & Francly Nelly Jiménez-García <sup>c,d</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Física y Matemática, Universidad Autónoma de Manizales, Caldas, Colombia. [atoro@autonoma.edu.co](mailto:atoro@autonoma.edu.co)

<sup>b</sup> Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de Caldas, Manizales, Colombia. [hugo.ortiz@ucaldas.edu.co](mailto:hugo.ortiz@ucaldas.edu.co)

<sup>c</sup> Departamento de Física y Matemática, Universidad Autónoma de Manizales, Caldas, Colombia. [francy@autonoma.edu.co](mailto:francy@autonoma.edu.co)

<sup>d</sup> Departamento de Física y Química, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia. [fjjimenezg@unal.edu.co](mailto:fjjimenezg@unal.edu.co)

<sup>e</sup> Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales. [latoroc@unal.edu.co](mailto:latoroc@unal.edu.co)

<sup>f</sup> Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales. [hhortiza@unal.edu.co](mailto:hhortiza@unal.edu.co)

## Resumen—

En este artículo se presenta la solución de la ecuación bidimensional de transferencia de calor con generación de calor o ecuación de Poisson, para una geometría con lados rectos y extremos curvos, con condiciones de frontera Dirichlet y Neumann, mediante el uso de un sistema cognitivo artificial (PDE Toolbox de Matlab) como problema inspirador en la enseñanza de las matemáticas avanzadas para ingeniería. La propuesta metodológica se apoya en la teoría para la enseñanza de la matemática basada en la solución de problemas de Polya. Se encontró que el sistema cognitivo artificial (SCA) empleado resultó ser una herramienta didáctica ideal para favorecer en el estudiante la capacidad de moverse en las diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos y físicos involucrados en el proceso de solución.

**Palabras Clave—** Sistemas cognitivos Artificiales, matemáticas avanzadas, ingeniería, enseñanza, aprendizaje

Recibido: 29 de enero de 2016. Revisado: 7 de marzo de 2016.

Aceptado: 4 de abril de 2016.

## Solving complex engineering problems using specialized cognitive systems as motivation in teaching of advanced mathematics for engineering

### Abstract—

In this article the solution of two-dimensional heat transfer equation with heat generation or Poisson equation for a geometry with straight sides and curved ends, with Dirichlet boundary conditions and Neumann, using an artificial cognitive system (PDE Toolbox for Matlab) as inspiration in teaching advanced mathematics to engineering problems is presented. The proposed methodology is based on the theory for teaching mathematics based on Polya troubleshooting. It was found that the artificial cognitive system (SCA) employed proved to be an ideal to encourage the student's ability to move in different forms of mathematical and physical concepts representation involved in the solution process.

**Keywords—** Artificial cognitive systems, advanced mathematics, engineering, teaching, learning

## 1. Introducción

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general, y en particular los universitarios, están pasando por

una transformación, que se debe al uso, cada vez más frecuente de las TIC dentro y fuera del aula de clase. En particular, el uso de los sistemas cognitivos artificiales [1], está cobrando fuerza no sólo como herramienta operacional, sino como medio para que los estudiantes comprendan los conceptos matemáticos que se les enseñan bajo diferentes tipos de representación: analítica, tabular (numérica) y gráfica, por ejemplo.

Sistemas cognitivos artificiales tales como Mathematica [2], Python [3], Matlab [4-9]; Geogebra [10], MathCad [11], Maple [12], Derive [13], por citar algunos, se están usando extensivamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro y fuera de las aulas universitarias.

Los sistemas cognitivos artificiales han sido usados extensamente como facilitadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas universitarias básicas tales como las matemáticas fundamentales, geometría analítica, cálculo diferencial e integral, cálculo en varias variables y métodos numéricos

Las áreas de las matemáticas previamente enunciadas no bastan para resolver todos los problemas de ingeniería. Existen problemas más complejos, que requieren el uso de métodos matemáticos específicos, denominados comúnmente como métodos matemáticos avanzados, que se usan para modelar y simular problemas que requieren extensos y tediosos cálculos matemáticos. Estos métodos han sido incorporados en sistemas cognitivos especializados, que hacen parte integral de los sistemas ya mencionados, y otros desarrollados específicamente para resolver sistemas de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones diferenciales y realizar análisis de regresión lineal y no lineal, a gran escala. Algunos de ellos, como el Polymat, se usan extensivamente para resolver problemas de ingeniería química [14-17]. GROMACS (Groningen Machine for Chemical Simulation) [18] ha sido diseñado específicamente para realizar extensos y complicados cálculos en dinámica molecular, en el

**Como citar este artículo:** Toro-Carvajal, L.A., Ortiz-Álvarez, H.H. y Jiménez-García, F.N., Solución de problemas complejos de ingeniería empleando sistemas cognitivos especializados como motivación en la enseñanza de matemáticas avanzadas para ingeniería, Rev. Educación en Ingeniería, 11 (22), 31-38, Julio, 2016.

análisis de proteínas, en el cual es necesario resolver las ecuaciones de Newton del movimiento, que involucran sistemas de cientos de millones de moléculas. FLUENT [19] se emplea para la solución de problemas complejos en mecánica de fluidos [20].

Estos sistemas cognitivos especializados presentan grandes potencialidades para ser incorporados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de métodos matemáticos avanzados. Como ejemplo se presentará en este artículo el uso de software especializado no solamente para resolver un problema concreto de ingeniería sino como instrumento mediador en la aplicación del método de la solución de problemas propuesto por Polya [21] en una asignatura de matemáticas especiales para ingeniería.

De acuerdo a este autor la matemática puede ser enseñada mediante la solución de problemas. Según esta teoría la construcción de dichas soluciones permite al estudiante el desarrollo de habilidades esenciales para su futuro desempeño profesional. Un problema, como tal, debe generar un verdadero desafío que exija al que lo resuelve creatividad al proponer nuevos caminos, una transversalización del conocimiento ya que muchos problemas exigen saberes multidisciplinarios, así como la capacidad de analizar y validar las soluciones encontradas y plantear otros problemas relacionados de una mayor generalidad.

Existen cuatro fases que caracterizan esta metodología: Primero, se debe comprender el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo, se deben captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga las incógnitas con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. Tercero, poner en ejecución el plan. Cuarto, volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla. Este planteamiento aunque simple en su concepción, es aplicable a problemas de gran complejidad, con una o muchas incógnitas, con modelos deterministas o estocásticos, con soluciones analíticas o aproximadas o enteramente cualitativas. Una ventaja adicional de este método, es que en la comprensión del problema se activan los pre saberes del estudiante (conocimientos previos), o en caso de no poseerlos, lo motiva a adquirirlos; y es esto lo que le permite tener una total comprensión del problema, sin preocuparse de extensos y tediosos cálculos numéricos. Lo anterior lleva al planteamiento correcto del modelo matemático del respectivo problema, mediante la aplicación de las leyes que gobiernan el fenómeno físico y su contextualización matemática, es decir, centrarse en el estudio profundo del mismo. Finalmente, el estudiante puede resolver el modelo matemático bajo diferentes condiciones, realizar simplificaciones al modelo, relajar ciertas condiciones, que pueden englobarse en la pregunta ¿qué pasa si? y hacer las comparaciones de las respectivas soluciones, mediante el análisis de las mismas.

A pesar de las opiniones adversas en contra del uso de SCA en la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Truesdell citado por [22]), es claro que no se puede ser ajeno a la evolución tecnológica que permea todo el entorno social y educativo y las innegables potencialidades de su uso. Cualquier incorporación de los SCA en los cursos de matemática necesita de un planteamiento metodológico que encare problemas

asociados a su utilización como la pérdida del sentido crítico y la confusión entre manipulación matemática y conocimiento [23].

Independientemente del grado de complejidad de los conceptos matemáticos a abordar en los cursos de matemática universitaria, el método de enseñanza basado en la solución de problemas, puede potenciarse en gran manera en cada uno de los pasos que definen esta metodología, a través del uso de SCA. La comprensión de un problema implica que el estudiante está en capacidad de enunciar sus características más importantes a través de diferentes representaciones, ya sean simbólicas, gráficas, tabulares, verbales entre otras. Los SCA permiten el manejo y conversión entre estos diferentes tipos de representaciones, facilitando así el planteamiento de estrategias de solución de problemas desde diferentes puntos de vista. Además, al tener disponibles estos registros el estudiante podrá construir estructuras mentales con correlaciones cada vez más elaboradas entre ellos. A este respecto [24] afirma que el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización necesaria de representaciones semióticas sino la capacidad para pasar de un registro semiótico de representación a otro.

Es de aclarar que las soluciones obtenidas mediante la aplicación de cualquier sistema cognitivo especializado pueden no tener significado físico, porque las respuestas correctas dependen de los datos correctos y del conocimiento acerca del campo específico de aplicación. Según la experiencia de los autores, es en este punto donde los estudiantes presentan las mayores dificultades.

Los pasos descritos anteriormente dan lugar a la generación de preguntas científicas, búsqueda de las respuestas a través de procesos de investigación, trabajo en equipo, estudio autónomo, búsqueda de información, responsabilidad de los alumnos, planificación del tiempo, y la elaboración de un producto o proceso final expuesto ante una audiencia, lo que se ha venido llamando como las competencias del siglo XXI.

En este artículo se presenta la herramienta PDE Toolbox de Matlab (un sistema cognitivo artificial especializado) como un medio gráfico para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales puestas en dominios bidimensionales acotados, mediante el uso del Método del Elemento Finito (MEF), que es un método matemático avanzado. Como un ejemplo de aplicación, se resuelve la ecuación de Poisson, para una geometría con lados rectos y extremos curvos, con condiciones de frontera Dirichlet y Neumann.

### ***1.1. Descripción del método***

Para ilustrar esta metodología se ha seleccionado un problema de transferencia de calor en el cual se debe resolver la ecuación del calor en estado estacionario, en una placa bidimensional con generación interna de calor, compuesta de lados rectos y extremos curvos (cuartos de circunferencia), cuyo material es acero. Las condiciones de frontera son de Dirichlet (valores especificados de la temperatura) en los lados rectos (superior e inferior), y de Newman (flujo de calor especificado) en los lados curvos.

A continuación se ilustran las cuatro etapas del método de Polya aplicadas a este problema específico las cuales son:

Comprender el problema, trazar un plan, poner ejecución el plan y volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla.

## 2. Resultados y Discusión

### 2.1. Comprender el problema

Desde el punto de vista del proceso de aprendizaje del estudiante, lo que más importa en este problema es obtener el modelo matemático correcto: entender que es un problema de transferencia de calor bidimensional con generación interna de calor, que se obtiene de la ecuación del calor tridimensional; imponer adecuadamente las condiciones de frontera, Dirichlet y Newman, escribiéndolas correctamente para cada parte de la frontera del dominio. El modelo matemático que rige el problema es una ecuación en derivadas parciales, de tipo elíptico, de segundo orden en dos variables y no homogénea, que se conoce como la ecuación de Poisson, que junto con las condiciones de frontera, representa un problema de valores en la frontera (PVF) [25]-[27]. El PVF, puede entonces plantearse en términos matemáticos como sigue:

$$-k\Delta u = f \tag{1}$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

$$u = u_1 \text{ (lado recto superior)} \tag{2}$$

$$u = u_2 \text{ (lado recto inferior)}$$

$$-k \partial u / \partial \mathbf{n} = g \text{ (lados curvos)} \tag{3}$$

En (1)-(3), los valores específicos son:  $k = 16.6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C}$ , la conductividad térmica del acero;  $f = 1000 \text{ W/m}^3$ , la generación de calor;  $u_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $u_2 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $-k \partial u / \partial \mathbf{n} = g = -500 \text{ W/m}^2$  es el flujo de calor. La incógnita es  $u = u(x, y)$ , la distribución de temperatura dentro de la placa y en sus bordes curvos, puesto que en los lados rectos la temperatura es conocida. Por lo demás, se debe trazar un esquema gráfico del problema, como el de la Fig. 1.

### 2.2. Trazar un plan

Tratar de obtener una solución analítica del PVF dado por la ecuación (1) y las condiciones de frontera (2) y (3) no es una tarea fácil, que se complica más por el hecho de que (2) es una

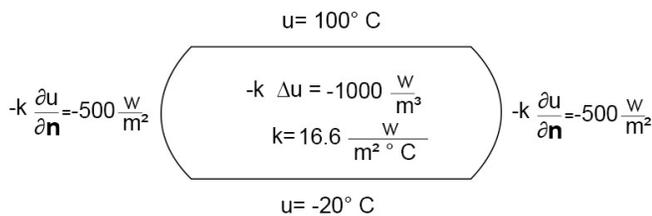


Figura 1. Esquema gráfico del problema  
Fuente: Los autores

condición de frontera tipo Newman, especificada sobre una frontera curva [28-29]. En estos casos, es mejor recurrir a un método numérico avanzado, tal como el Método del Elemento Finito, método que está implementado en Matlab en la interface de usuario *pdetool*. Por lo tanto, *trazar* un plan significa, primer lugar, tener unos conocimientos básicos del método del Elemento Finito, y luego entender como tal método está implementado en el *pdetool*.

#### 2.2.1. El método del Elemento Finito

El Método del Elemento Finito (MEF) es un procedimiento numérico que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales sobre un dominio dado, en el cual el dominio es representado como una colección de dominios simples, denominados *elementos finitos*, de tal manera que es posible construir sistemáticamente la funciones de aproximación que son necesarias en los métodos variacionales o de residuos ponderados, para la aproximación de la solución de un problema en cada elemento [30]-[35]. Por lo tanto, el MEF difiere de los métodos variacionales tradicionales en la forma como son obtenidas las funciones aproximantes, y ésta diferencia hace que el MEF posea las siguientes tres características:

- *División de un dominio en subdominios*, lo que permite la representación de dominios geoméricamente complejos como una colección de dominios geoméricamente simples, lo que a su vez hace posible disponer de un procedimiento sistemático para la derivación de las funciones de aproximación.
- *Derivación de las funciones de aproximación* en cada elemento. Las funciones aproximantes son usualmente polinomios algebraicos que son derivados usando teoría de interpolación.
- *Ensamble de elementos*, lo cual se basa en la continuidad de la solución y en el balance de los flujos internos. El ensamble de elementos es un análogo discreto del dominio original, y el sistema asociado de ecuaciones algebraicas representa una analogía numérica del modelo matemático del problema que está siendo analizado.

Las tres características enumeradas, que constituyen las tres grandes etapas de la modelación de un problema por el MEF, están estrechamente relacionadas. La geometría de los elementos usados para representar el dominio de un problema debe ser tal que las funciones aproximantes puedan ser derivadas con unicidad. Las funciones de aproximación dependen no solamente de la geometría sino también del número y localización de ciertos puntos del elemento, denominados *nodos*, y de las cantidades a ser interpoladas tales como la solución o la solución y los gradientes. Una vez las funciones aproximantes han sido derivadas, el procedimiento para obtener las relaciones algebraicas entre los coeficientes desconocidos (lo cual da los valores de la solución en los nodos de los elementos finitos) es exactamente el mismo que el usado en los métodos de Rayleigh-Ritz y de residuos ponderados. El MEF no solamente elimina los defectos de los métodos variacionales tradicionales, sino que también está dotado con las propiedades de un método computacionalmente efectivo.

Para entender cómo se modela en Matlab una ecuación diferencial puesta en un dominio dado y acotado del plano usando el MEF, considérese la siguiente ecuación diferencial parcial (EDP) de tipo *elíptico*:

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f \quad \text{en } \Omega \tag{4}$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado del plano;  $a(x,y), c(x,y), f(x,y)$  y la incógnita  $u(x,y)$  son funciones definidas en  $\Omega$ . Las condiciones de frontera especificadas son una combinación de  $u$  y su derivada normal sobre la frontera:

- Dirichlet:  $hu = r$  sobre la frontera  $\partial\Omega$
- Generalizada de Neumann:  $\mathbf{n} \cdot (c\nabla u) + qu = g$  sobre  $\partial\Omega$ .
- Mezclada: solamente se aplican a sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Son una combinación de condiciones Dirichlet y generalizada de Neuman.

El vector  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal exterior,  $g(x,y), q(x,y), h(x,y)$  Y  $r(x,y)$  son funciones definidas en  $\partial\Omega$

Para la división (discretización) de  $\Omega$  en subdominios, Matlab usa triángulos. Si  $u_h(x,y)$  es un polinomio lineal en dos variables que aproxima a  $u$ , es decir, si  $u_h(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y$  dentro de un triángulo, no está claro que significado debe dársele a las segundas derivadas parciales. Dentro de cada triángulo,  $\nabla u_h$  es una constante y por lo tanto las segundas derivadas se anulan. En los lados de los triángulos  $c\nabla u_h$  es, en general, discontinua y otra derivada más no tiene sentido.

Dado que  $u_h$  es solamente una aproximación, entonces se tiene que

$$-\nabla \cdot (c\nabla u_h) + au_h - f = R(x,y) \neq 0 \tag{5}$$

donde  $R(x,y)$  se denomina *residuo*.

Lo que se busca es la mejor aproximación de  $u$  en la clase de los polinomios en dos variables, que son funciones continuas a trozos. Por lo tanto, se prueba la ecuación para  $u_h$  contra todas las funciones posibles  $v(x,y)$  de tal clase. Por prueba aquí se entiende formalmente multiplicar el residuo  $R(x,y)$  por una función  $v$ , integrar sobre  $\Omega$ , y determinar  $u_k$  tal que la integral ponderada se anule, es decir, tal que

$$\int_{\Omega} [-\nabla \cdot (c\nabla u_h) + au_h - f]v \, dx \, dy = 0 \tag{6}$$

para todas las posibles  $v$ . Las funciones  $v$  usualmente se denominan *funciones de prueba*.

La ec. (6) puede integrarse usando la fórmula integración por partes de Green, y por lo tanto  $u_h$  debe satisfacer

$$\int_{\Omega} [(c\nabla u_h)\nabla v + au_hv] \, dx \, dy - \int_{\partial\Omega} \mathbf{\bar{n}} \cdot (c\nabla u_h)v \, ds = \int_{\Omega} fv \, dx \, dy, \quad \forall v \tag{7}$$

siendo  $\partial\Omega$  la frontera de  $\Omega$ , y  $ds$  el diferencial de longitud de arco en la frontera. Debe notarse que la formulación integral de la ec. (7) está bien definida aún si  $u_h$  y  $v$  son funciones continuas a trozos y lineales.

Las condiciones de frontera son incorporadas de la siguiente forma: si  $u_h$  es conocida en algunos puntos de la frontera (condiciones de frontera tipo Dirichlet), las funciones de prueba se restringen a  $v=0$  en tales puntos, y se requiere que  $u_h$  tome el valor deseado en aquéllos puntos. En los demás puntos de la frontera se imponen condiciones de frontera generalizadas de Neumann. Con todo lo anterior la formulación MEF puede interpretarse como: *hallar  $u_h$  tal que*

$$\int_{\Omega} [(c\nabla u_h)\nabla v + au_hv] \, dx \, dy - \int_{\partial\Omega_1} qu_hv \, ds = \int_{\Omega} fv \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega_1} gvdv, \quad \forall v. \tag{8}$$

Aquí,  $\partial\Omega_1$  es la parte de la frontera con condiciones Neumann. Las funciones de prueba  $v$  deben ser cero en  $\partial\Omega - \partial\Omega_1$

Cualquier función continua a trozos y lineal puede ser representada como una combinación lineal

$$u_h(x,y) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x,y), \quad \text{donde las } \phi_i \text{ son funciones lineales}$$

continuas a trozos y los  $U_i$  son coeficientes escalares. Las funciones  $\phi_i$  se eligen de tal manera que tenga "altura" 1 el nodo (vértice del triángulo)  $i$  y altura 0 en los demás nodos. Para cualquier  $v$  fija, la formulación MEF produce un sistema de ecuaciones algebraicas en las incógnitas  $U_i$ . Se desea determinar N incógnitas y por lo tanto se necesitan elegir N funciones  $v$ . Esto conduce a un sistema de ecuaciones lineales  $KU = F$ , donde la matriz  $K$  y el vector  $F$  contienen integrales en términos de las funciones de prueba  $\phi_i, \phi_j$  y los coeficientes que definen el problema:  $c, a, f, q$  y  $g$ . El vector solución  $U$  contiene los coeficientes de la expansión de  $u_h$ , los cuales también son los valores de  $u_h$  en cada nodo, ya que de la definición de las  $\phi_i$ ,  $u_h(x_i, y_i) = U_i$ , donde  $(x_i, y_i)$  son las coordenadas del nodo (vértice)  $i$  del triángulo.

La herramienta de análisis por el MEF que posee Matlab se denomina *PDE Toolbox*, y posee funciones para construir  $K$  y  $F$ . Esto es realizado automáticamente por la interface gráfica de usuario, que se explicará posteriormente, pero el usuario tiene directo acceso a las matrices MEF desde la función *asmpde*.

Resumiendo, el MEF aproxima la solución  $u$  de una ecuación diferencial parcial mediante una función lineal continua trozos  $u_h$ , que es expandida mediante funciones base de prueba  $\phi_i$ , y el residuo se prueba contra todas las funciones base. Este procedimiento produce un sistema de ecuaciones lineales  $KU = F$ . Las componentes de  $U$  son los valores de  $u_h$

en los nodos. Para  $(x, y)$  en el interior de un triángulo,  $u_h(x, y)$  se halla por interpolación usando los valores nodales. Como se deduce de la exposición anterior, para entender las bases teóricas del MEF, el estudiante debe poner en acción algunos presaberes, siendo los más importante, integración bidimensional y el teorema de integración por partes bidimensional (teorema de Green).

### 2.2.2. El PDE Toolbox de Matlab

A continuación se explica, de manera general, como se usa la interface gráfica de usuario *pdetool* de Matlab, la cual es una parte de la PDE Toolbox [36]. El problema a resolver es la Ecuación de Poisson  $-\Delta u = f$ . El dominio bidimensional  $\Omega$ , en el cual se desea resolver la EDP, es algo complejo, y las condiciones de frontera son del tipo Dirichlet y Neumann.

Primero, se invoca Matlab. Para hacer visible la interface gráfica de usuario (GUI), se escribe en el prompt de Matlab el comando *pdetool*, que puede tarde entre 1 y 2 minutos para hacerse visible. La GUI es similar a la Fig.2.

La primera etapa es dibujar la geometría de  $\Omega$  en la cual se desea resolver la EDP. La GUI provee cuatro tipos básicos de objetos sólidos: *polígonos, rectángulos, círculos y elipses*. Estos objetos se usan para crear un *Constructive Solid Geometry model (CSG model)*. A cada objeto sólido se le asigna un único rótulo, y usando el álgebra de conjuntos, la geometría resultante puede ser construida mediante combinaciones de uniones, intersecciones y diferencia de conjuntos. Por defecto, el modelo CSG es la unión de todos los objetos sólidos.

Para seleccionar un objeto sólido, se debe hacer click en el botón con el icono rotulado con el objeto sólido que se desea dibujar, o se puede seleccionar tal objeto usando el menú desplegable **Draw**. Para dibujar un rectángulo o un cuadrado comenzando en una esquina, se presiona el botón del rectángulo sin el signo + en la mitad. El botón con el signo + se usa para crear un rectángulo centrado en el origen. Lo mismo aplica para dibujar círculos. Antes de dibujar la geometría se habilitan, del menú desplegable **Options** las utilidades **Grid** y “**snap-to-grid**”.

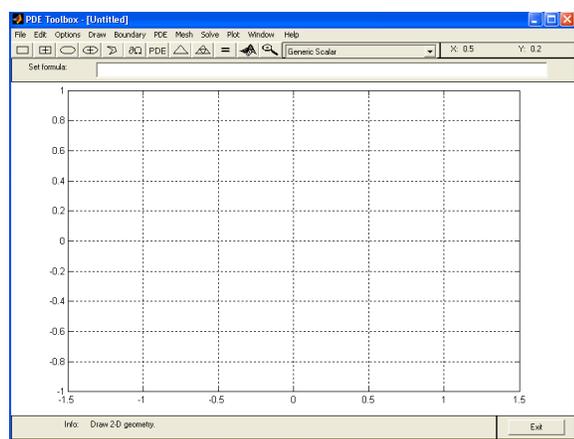


Figura 2. Interface de Usuario (GUI) del PDE Toolbox de Matlab.  
Fuente: Los autores

La geometría que se usará como ejemplo es una paleta de sección transversal rectangular con bordes circulares en sus extremos, cuyo material es acero, como se muestra en la Fig. 3, que se ha dibujado siguiendo las reglas enunciadas con anterioridad para el modelo CGS. La fórmula que define la geometría de la Fig. 3 es  $C1 + C2 + R1$ .

La Fig. 4 muestra la frontera de la geometría, que se obtiene del menú **Boundary** y seleccionando la opción **Remove All Subdomain Borders**, que remueve todas las fronteras que constituyen las intersecciones de los objetos sólidos dibujados.

Las fronteras se indican con líneas coloreadas con flechas en sus extremos. Los colores designan el tipo de condición de frontera, y las flechas apuntan hacia el extremo del segmento de frontera. La información concerniente a la dirección es dada en el caso de que la condición de frontera es parametrizada a lo largo de la frontera. La condición de frontera puede ser también una función de las coordenadas  $x$  y  $y$ , o simplemente una constante. Por defecto, la condición de frontera es del tipo Dirichlet, es decir  $u = 0$ , en la frontera.

Las condiciones Dirichlet son indicadas por color rojo. La condición de frontera puede ser también de tipo generalizada Neumann y se indica por color azul, o mezclada, que se indica por color verde. Para una función escalar  $U$ , todas las condiciones de frontera son Dirichlet y/o Neumann. Para cambiar las condiciones de frontera, se hace doble click en el segmento para el cual se desea el cambio o se pueden seleccionar todos los segmentos desde el menú **Edit** con la opción **Select All**. Los segmentos seleccionados aparecen en color gris.

Haciendo doble click en cualquier parte de la frontera seleccionada abre la caja de diálogo **Boundary condition**. Aquí, el usuario selecciona el tipo de condición de frontera, y la escribe como una expresión Matlab.

Sobre los lados rectos, se imponen condiciones tipo Dirichlet, es decir, se especifican temperaturas. En la parte superior, la temperatura es de  $100^{\circ}C$  y en la parte inferior, la temperatura es de  $-20^{\circ}C$ . En la Fig. 5 se muestra la condición de frontera para la parte recta superior. La derivada normal  $-k \partial u / \partial n = -500 W / m^2$ , corresponde al flujo de calor especificado en los bordes curvos, que por convención es negativo cuando se le suministra a un sistema, como se muestra en la Fig. 6.

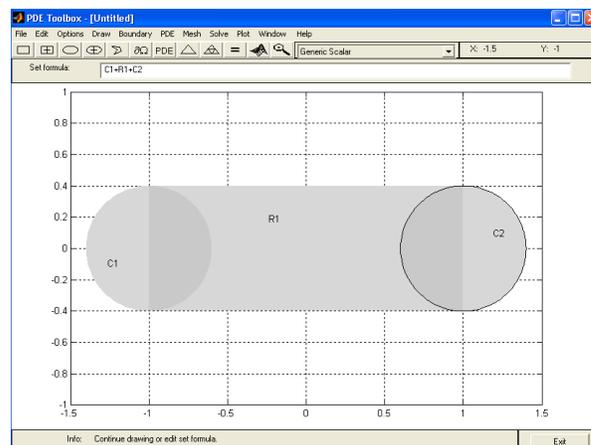


Figura 3. Modelo geométrico de la región bidimensional  
Fuente: Los autores

### 2.3. Poner en ejecución el plan

La siguiente etapa es la selección del tipo de EDP que se desea resolver. La selección se hace desde el botón rotulado con **PDE** o seleccionando **PDE Specification** desde el menú desplegable **PDE**. El usuario puede seleccionar el tipo de EDP: elíptica, parabólica, hiperbólica o de valores propios (eigenmodes), y definir los coeficientes aplicables a cada caso.

En el caso bajo consideración, el problema consiste en un EDP elíptica  $-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$ , con  $c = 16.60, a = 0, f = 10000.0$ , como se muestra en la Fig. 7. Estos datos corresponden al PVF (6)-(8), donde  $c = k = 16.6W/m^2 \cdot ^\circ C$ ,  $f = 10000W/m^3$ .

La siguiente etapa es la creación de la malla triangular del dominio donde se resuelve la EDP. El mallado se crea y se muestra al presionar el botón rotulado con  $\Delta$  o seleccionando del menú **Mesh** la opción **Initialize Mesh**. Si el usuario desea una solución más precisa, puede refinar la malla triangular presionando el botón con cuatro triángulos o seleccionando la opción **Refine Mesh** del menú **Mesh**. La Fig. 8 presenta la malla triangular de la región bajo consideración y consta de 753 nodos y 1376 triángulos.

Ahora se tiene todo dispuesto para hallar la solución del problema bajo consideración. Basta presionar el botón  $=$ , o seleccionar del menú **Solve** la opción **Solve PDE**. La solución se presenta en forma de una gráfica de color (por defecto), junto con una barra de color que muestra la escala de los valores de la solución. Si el usuario lo desea, puede exportar, al workspace de Matlab, la solución en forma de vector. La gráfica de la solución se muestra en la Fig. 9.

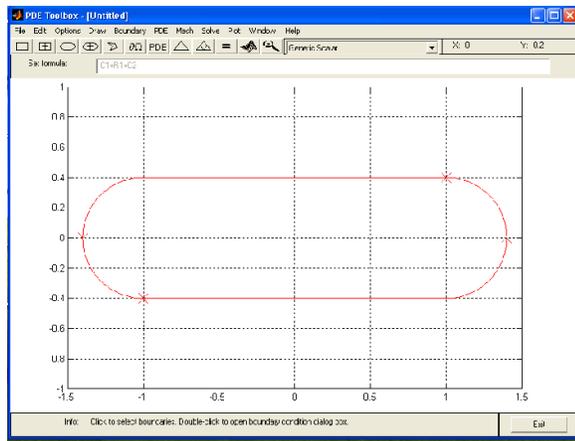


Figura 4. Frontera del Dominio.  
Fuente: Los autores

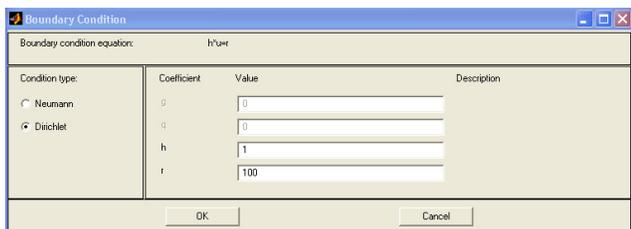


Figura 5. Condición Dirichlet lado superior.  
Fuente: Los autores

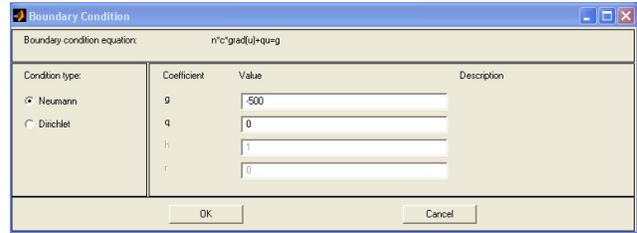


Figura 6. Condiciones de frontera tipo Neumann.  
Fuente: Los autores

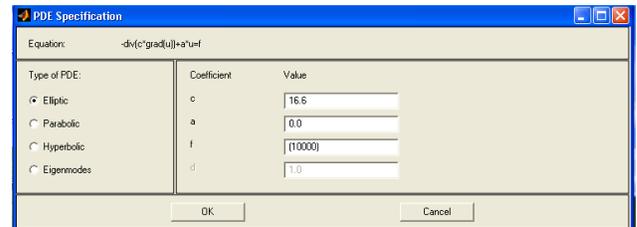


Figura 7. Selección de la EDP.  
Fuente: Los autores

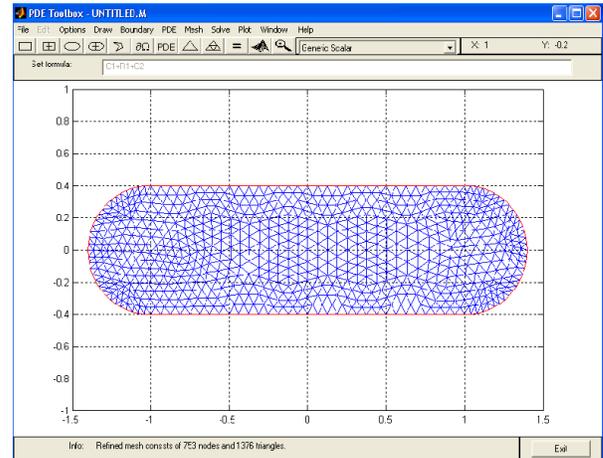


Figura 8. Malla Triangular.  
Fuente: Los autores

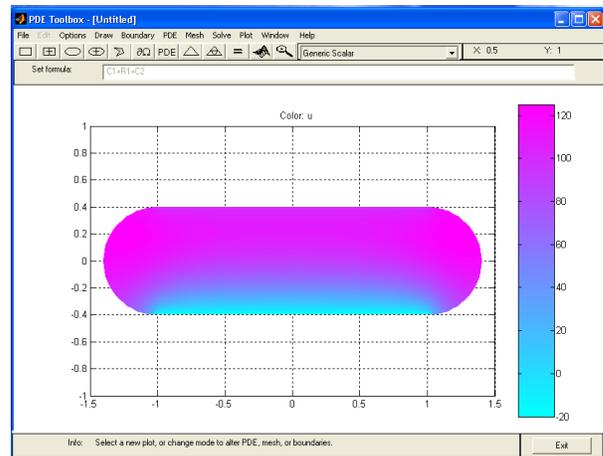


Figura 9. Gráfica de la solución.  
Fuente: Los autores

Existen más tipos de gráficas disponibles para visualizar la solución. Estos se pueden obtener del menú **Plot**, seleccionando la opción **Parameters**.

Un aspecto importante, desde el punto de vista del aprendizaje del estudiante respecto del uso de este sistema cognitivo artificial especializado, es la entrada correcta de los datos: las condiciones de frontera tipo Dirichlet y de Newman; así como el valor de los parámetros  $c=k$ ,  $a=0$ ,  $g$  y  $f$ , identificándolos del modelo matemático dado por las ec. (1)-(3), en correspondencia con el tipo de modelo matemático que trae implícito el *pdetool*.

#### 2.4. Volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla

Una vez obtenida la solución, es necesario hacer un análisis de la misma, para determinar si ella puede ser correcta o no. En primer lugar, la barra de color de la Fig. 9, muestra una variación de la temperatura entre  $-20^{\circ}C$  y  $120^{\circ}C$ . En la parte superior e inferior las temperaturas se corresponden con las condiciones de frontera respectivas. En los extremos derecho e izquierdo de la región, se observa un gradiente de temperatura que va aproximadamente hasta  $120^{\circ}C$ , lo que es posible, puesto a que se está suministrando flujo de calor a una tasa de  $-k\partial u/\partial n = -500W/m^2$ , lo que hace que en tales extremos haya un aumento de la temperatura. Este análisis muestra que la solución, en términos generales, está dentro de un rango lógico.

En esta etapa de la solución del problema, el estudiante podría ver la necesidad de replantear el problema, revisar si el modelo utilizado realmente se corresponde con el problema planteado, variar las condiciones para observar la respuesta del sistema, plantear otros problemas cuya solución se relacione con la ya obtenida, socializarla y compartirla con sus compañeros resaltando experiencias significativas en este proceso de aprendizaje.

### 3. Conclusiones

De este trabajo se puede concluir que los sistemas cognitivos artificiales especializados son útiles en la enseñanza de métodos matemáticos avanzados para la solución de problemas complejos en ingeniería, al ser abordados desde la propuesta para la enseñanza y aprendizaje de la matemática de Polya basada en la solución de problemas.

En particular el *pdetool* de Matlab resulta ser una herramienta didáctica ideal para resolver problemas bidimensionales complejos de transferencia de calor y permite al estudiante acceder a las diferentes formas de representación inherentes a los conceptos matemáticos y físicos involucrados en el proceso de solución.

La solución de la ecuación antes mencionada a través del uso del PDE Toolbox de Matlab cumple como objetivo básico liberar al estudiante de los detalles de cálculo que en este caso son voluminosos y le permite concentrarse en aspectos más relevantes de la solución del problema como son la interpretación, la identificación de las condiciones del problema y el modelo a utilizar, los conceptos matemáticos necesarios y las estrategias de validación de las soluciones obtenidas. Todo

lo anterior promueve niveles de pensamiento superior y motiva al estudiante al hacerlo consciente de su capacidad de resolver problemas complejos de aplicación significativa en su perfil profesional.

### Referencias

- [1] Toro, L.A., Ortiz, H.H., Jiménez, F.N. y Agudelo, J.deJ., Los sistemas cognitivos artificiales en la enseñanza de las matemáticas. Educ. Educ., 15(12), pp. 167-183. 2012. DOI:10.5294/edu.2012.15.2.1
- [2] Contreras de la Fuente, A., Font Moll, V., García-Armenteros, M., Luque-Cañada, L., Marcolini-Bernardi, M., Ordóñez-Cañada, L., Ortega-Carpio, M. y Sánchez-Gómez, C., Aplicación del programa Mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. Universidad de Jaen, España. 2005.
- [3] Pardini, A., Fundamentación del uso de software libre en la universidad pública. Enseñando matemáticas con herramientas alternativas. 1º Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de la Plata. Buenos Aires, Argentina. Octubre, [En línea] 2007. Disponible en: [http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab\\_eventos/ev.275/ev.275.pdf](http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.275/ev.275.pdf)
- [4] Nieves, A. and Domínguez, F.C., Métodos numéricos aplicados a la ingeniería. CECSA, México, 2003.
- [5] Suárez, M.V., Cálculo integral y aplicaciones en Matlab. Pearson Prentice Hall, México, 2004.
- [6] L.A. Toro-Carvajal, Una introducción a Matlab para estudiantes de ciencias e ingeniería. Editorial Universidad Autónoma de Manizales. 2009.
- [7] Bober, W. and Masory, C.T., Numerical and Analytical methods with Matlab. CRC Press. Taylor and Francis Group, New York, USA, 2009. DOI: 10.1201/b15838
- [8] Valbuena, S.D., Matlab con aplicaciones. EDUCOSTA. 2010.
- [9] Wordford, C.C., Numerical methods with worked examples: Matlab Edition. Second Edition. 2012.
- [10] Mifsud, E., Matemáticas y las TIC-Geogebra. Observatorio Tecnológico. Gobierno de España. [en línea]. 2010. Madrid. Disponible en: <http://recursostic.educacio.es>.
- [11] Agudelo-Calle, J.deJ. Matemáticas básicas con MathCad (Vol. 1). Universidad Autónoma de Manizales. Manizales, Colombia, 2013.
- [12] de Guerrero-Magaña, M. y Cortés, J.C., Uso de la tecnología en educación matemática: Investigaciones y propuestas. Asociación mexicana de investigadores del uso de la tecnología en educación matemática (AMIUTEM, A.C.), México, 2011.
- [13] Camacho, M. y Garbín, R.D., Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. Educ. Mat., [En línea]. 20(3), pp. 33-57, 2008. Disponible en: <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v20n3/v20n3a3.pdf>
- [14] Fogler, H.S., Elementos de ingeniería de las reacciones químicas, Tercera Edición, Prentice Hall, México, 2001.
- [15] Cutlip, M.B., Resolución de problemas en ingeniería química y bioquímica con POLYMATH, Excel y MATLAB. Segunda Edición, Prentice Hall, Madrid, España, 2008.
- [16] Shacham, M.M., From numerical problem solving to model-based experimentation. Incorporating Computer-Based tools of various scales into the ChE curriculum. Chem. Eng. Educ. [Online]. 43(4), pp. 315-321, 2009. Savailable at: <http://eric.ed.gov/?id=EJ877797>
- [17] Shacham, M.N., Efficiently solve complex calculations. Chem. Eng. Prog. [Online]. 99(10), pp. 56-61. 2003. Available at: [http://www.polymath-software.com/papers/CEP\\_99\\_56\\_03.pdf](http://www.polymath-software.com/papers/CEP_99_56_03.pdf)
- [18] Van der Spoel, D.E., GROMACS: Fast, flexible and free. Journal of Computational Chemistry, 26(16), pp. 1701-1718. 2005. DOI: 10.1002/jcc.20291
- [19] Cengel, Y.A., Mecánica de fluidos. Fundamentos y aplicaciones. McGraw Hill. 2006.
- [20] Paiva, M., Ramos, A., Zambrano, T. y Berrios, R., Análisis fluido-dinámico bidimensional de los gases que pasan a través de dos válvulas de control en línea de cabecera del regenerador de una planta de

- desintegración catalítica. Rev. Fac. Ing. UCV, 23(3), pp. 83-90, 2008. DOI: S0798-40652008000300009
- [21] Polya, G., *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas, México, 1992.
- [22] Ortega, P., Una estrategia didáctica para la enseñanza del álgebra lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE. Revista Complutense de Educación, 13(2), pp. 645-675, 2002. DOI: RCED0202220645A/16594
- [23] Halmos, P., Is computer teaching harmful? Notices of the A.M.S., 38(5), pp. 420-423, 1991.
- [24] Duval, P., *La conversión de representaciones: Uno de los procesos fundamentales del pensamiento*. Editorial Universitaria de Grenoble, Grenoble, Francia, 2008.
- [25] Asmar, N., *Partial differential equations and boundary value problems*. Upper saddle river. Prentice Hall, New Jersey, USA, 2000.
- [26] Haberman, R., *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno*. 3ra Edición, Prentice Hall, México, 2003.
- [27] Aimar, H., Bongioanni, B. and Morin, P., *Matemática aplicada. Ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad Nacional del Litoral, Santafé, Argentina, 2012.
- [28] F.P. Incropera y Witt, D.P. *Fundamentos de transferencia de calor*, 4a ed. Prentice Hall Hispanoamericana S.A., México, 1999.
- [29] Cengel, Y.A., *Transferencia de calor y masa. Un enfoque práctico*. 3ra Edición, McGraw Hill, México, 2007.
- [30] Chandrupatla, T.R., *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. Prentice Hall, Boston, USA, 1999.
- [31] Kwon, Y.W. and Hyochoong, B., *The finite element method using Matlab*. 2da Edición, CRC Press, Boca Raton-Florida, USA, 2000.
- [32] Hutton, D.V., *Fundamental of finite element method*. McGraw Hill Higher Education, New York, USA, 2004.
- [33] Lewis, R.W., Perumal, N. and Kankanhally, N.S., *Fundamental of finite element method for heat and fluid flow*. John Wiley and Sons, Ltd., West Sussex, England, 2004. DOI: 10.1002/0470014164
- [34] Bhatti, M.A., *Fundamental of finite element analysis and applications*. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
- [35] Chen, Z., *Finite element method and their applications*. Springer. New York, USA, 2005.
- [36] *The MathWorks, I. partial differential equations toolbox user's guide*. 1996.

**L.A. Toro-Carvajal**, es Ing- Químico en 1979 de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Colombia, MSc. Ciencias Matemáticas en 2001 de la Universidad del Valle, Colombia, y Dr. en Ingeniería - Línea Automática en 2014 de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Colombia. Se vinculó a la Universidad Autónoma de Manizales en Junio de 1993, y desde 2014 es profesor titular de la misma Universidad en el Departamento de Física y Matemáticas, del cual fue Coordinador. Además, desde 2008 es profesor catedrático asociado de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales en el Departamento de Matemáticas y Estadística. Sus intereses investigativos incluyen: modelación y simulación en ingeniería, dinámica molecular, análisis funcional, método del elemento finito y el uso de los sistemas cognitivos artificiales (SCA) en la enseñanza de las matemáticas. Actualmente pertenece al Grupo de Investigación en Física y Matemática con Énfasis en la Formación de Ingenieros, el cual se encuentra en categoría B en COLCIENCIAS. ORCID: 0000-0002-6706-8179

**H.H. Ortiz-Álvarez**, es Ing. Químico en 199, de la Universidad Nacional de Colombia, Esp. en Educación Ambiental, Msc. en enseñanza de la Matemática y candidato a Dr. en Ingeniería. Actualmente se desempeña como docente de planta del Departamento de Matemática de la Universidad de Caldas, Manizales, Colombia, siendo además profesor catedrático del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales. Sus áreas de interés son la física, la química y la matemática. Su desempeño como investigador se ha centrado principalmente en la solución de ecuaciones diferenciales por el método de los grupos de simetría, la educación matemática y la simulación de propiedades físicas de estructuras magnetoeléctricas por el método de Monte Carlo. Ha sido investigador activo en el Grupo de Investigación en Física y Matemática con énfasis en la formación de ingenieros (Universidad Autónoma de Manizales), Grupo de Investigación en Matemáticas

y Estadística (Universidad de Caldas), Grupo de Enseñanza e Investigación de las Ecuaciones Diferenciales GEINED (Universidad Tecnológica de Pereira) y PCM Computational Applications (Universidad Nacional de Colombia). ORCID: 0000-0001-5605-1980

**F.N Jiménez- García**, es graduó Ing. Química de la Universidad Nacional de Colombia Esp. en Computación para la Docencia en la Universidad Antonio Nariño. MSc. en Ciencias Física y Dra. en Ingeniería también en la Universidad Nacional, Sede Manizales, Colombia. Ejerció profesionalmente en varias Universidades de su ciudad natal tales como: la Universidad de Caldas y la Universidad Antonio Nariño. Actualmente es docente titular en dedicación de cátedra de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales y docente titular de tiempo completo en la Universidad Autónoma de Manizales (UAM). Entre sus campos de interés están los procesos de enseñanza y aprendizaje tanto de física como de la matemática así como el estudio de materiales de ingeniería. Se ha desempeñado como coordinadora del Departamento de Física y Matemáticas, como docente e investigadora del mismo y pertenece al Grupo de Investigación en Física y Matemática con énfasis en la formación de ingenieros, el cual se encuentra en categoría B en COLCIENCIAS, que actualmente lidera. ORCID: 0000-0003-1546-8426